维普资讯 http://www.cqvip.com

2007年2月 安庆师范学院学报(自然科学版) Feb.2007
第13卷第1期 Journal of Anqing Teachers College(Natural Science Edition) Vol.13 No.1

图论中最短路问题的MATLAB程序实现

管志忠[1,2],刘永明[2]

(1.池州职业技术学院,安徽 池州 24700; 2.华东师范大学 数学系,上海 200062)

摘　要:解决图论中最短路问题的最好方法 --"Dijstra 算法",通过解析实例模型,对模型算法进行描述、拓展,并给出了求最短路以及求最短路长的MATLAB程序,此程序具有通用性。

关键词:最短路问题;Dijkstra算法;MATLAB程序;最短路长

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1007-4260(2007)01-0026-04

1 问题的提出

设 $G=(V,E)$为连通图,顶点集为 $\{1, 2, 3, \cdots n\}$, 图中各边 (i, j) 有非负权 c_{ij} (当 (i, j)不是边时,权等于 inf; 当(i,j)是有向边时,c_{ji} 与 c_{ij} 可以不相等), 求一条道路使它是从顶点 1 到顶点 n 的所有道路中总权数最小的路, 这就是图论中的最短路问题[1]。解决这个问题至今公认最好的方法是 1959 年提出 Dijkstra 算法,它用于计算一个点 s 到其他所有点的最短路。 此算法基本原理是:若某条路是最短路,这条路上的任意一段路也是连接这段路两个端点的最短路[1,2]。

2 算法描述[3,4]

第一步 将点 s 标上永久性标记 $P(s)=0$, 表示从开始点 s 到达点 s 的最短距离是零。

第二步 将其余的顶点标上 T 标记,T 记号是试探性标记,点 j 的 T 标记 $T(j)$分两部分、$T(j)=T_1(j)(T_2(j))$,第一部分 $T_1(j)$为从开始点 s 经过带 P 标记的点到达 j 点的最短路的权和、括号中 $T_2(j)$为第二部分,是这最短路中 j 点的前一点 (如有多条最短路,则 $T_2(j)$可能有多值)。不能经过带 P 标记的点到达的点的 T_1 值是无穷大(用 inf 表示),T_2 是空集。

第三步 若这些带有 T 标记中权和数 T_1 最小的点是 k,则点 k 是带 P 标记的点外与开始点 s 最近的点。把点 k 的 T 标记改为 P 标记,如果权和数最小的点有多个,则把它们都改为 P 标记。若点 n 不是 P 标记, 转第二步(对带有 T 标记的点重新标记,直至点 n 为 P 标记为止)。

第四步 追寻最短路, 从终点 n 开始逆向逐次求最短路经过的点权和为 $P(n)$.

从算法直接可见所得到的路是最短路。上述算法更具体的步骤如下:不妨设开始点的标号是 1。

(1)设 $N=0$, $P(1)=0$, 其余各点都是 T 标记,T_1 值为无穷大, T_2 值为空集。

(2)若 v_i 点为刚成为 P 标记的(一个或几个)点,将所有与这些 v_i 相邻的带有 T 标记的点 v_j 的 T 标记的值改为 $T_1(v_j,N+1)=\min_i[(T_1(v_j,N),P(v_i)+c_{ij}]$;

若 $T_1(v_j,N+1)=P(v_i)+c_{ij}$, 则 $T_2(v_j,N+1)=v_i$, 若 $T_1(v_j,N+1)=T_1(v_j,N)$, 则 $T_2(v_j,N+1)=T_2(v_j,N)$, (因此 T_2 可能是多值的)。

(3)比较所有具有 T 标记的点,把其中 T_1 值最小者的点 v_k 的 T 标记改为 P 标记,$P(v_k)=\min T_1(v_j,N+1)$; 当存在两个以上的最小者时,可同时将它们改为 P 标记; 若点 $v_k=n$ 则转(4), 否则将 N 加上 1, 用 v_k 代 v_i 转回 (2)。

(4)追寻最短路, 从终点 n 开始逆向逐次求最短路经过的点(可能不止一条最短路), 权和为 $P(n)$。

3 算法拓展与MATLAB程序实现

求 n 个顶点的连通图 G 上任意两点间的最短路长的算法(它是下面要讲的 Floyd(1962)算法的改

收稿日期:2006-09-14

作者简介:管志忠(1965-),男,安徽池州人,华东师范大学硕士,池州职业技术学院副教授,专业方向:应用数学。

维普资讯 http://www.cqvip.com

进，但它只适用于非负权的最短路问题)。 设 l_{ij} 为顶点 i 到 j 的距离，令图 G 的权矩阵 $D^{(0)}=(d_{ij}^{(0)})$ ，为

$$d_{ij}^{(0)}=\begin{cases} l_{ij}，当 (i,j)\in E \\ 0，当 i=j 时 \\ \infty，其他情况 \end{cases}$$

算法基本步骤为[5]：

(1)输入权矩阵 $D^{(0)}$.

(2)计算 $D=(d_{ij})_{n\times n}$ ， 其中 $d_{ij}=\min_{s}[d_{is}^{(0)}+d_{sj}^{(0)}]$ 表示从点 i 到点 j 的距离，或者经过某一个中间点到达 j 点的最短路。

(3)若 $D=D^{(0)}$ ，则 d_{ij} 就是 i 到 j 的最短路长，不然，取 $D^{(0)}=D$，转(2)。

其中第(2)步最多执行 max1=floor(log(2*n−3)/log(2))次。其原理是：第(2)步得到的矩阵的元素 d_{ij} 表示从 i 点到 j 点的距离，或 i 点能经过另一点 k 到达 j 点的距离中的最小值。因此每执行一次步骤(2)所得到的矩阵 D 相当于另一个图的矩阵，这个图的构造是：当 d_{ij} 的值小于原矩阵的值时，将原图上将 i,j 点之间加上一条权为 d_{ij} 的边，若原来有边，则改变它的权为 d_{ij}.

设 i, j 点间有一条最短路，这最短路有 m 个顶点，不妨记这些顶点为 $i, i+1, i+2, \cdots, i+m-1=j$, 经过一次(2)的步骤时，求得 $(i, i+2), (i+2, i+4)$,……的长度，再经过一次(2)的步骤时，得到 $(i, i+4), (i+4, i+8)$,……的长度，……. 因为当 2^k >= m−1 >= 2^(k−1) + 1 时，最多执行 k 次可以求得点 1 到点 m 之间的最短距，所以重复步骤(2)最多 floor(log(2*m−3)/log(2))次可算得 (i,j) 间的最短距离。

编制 MatLab 程序如下：

```
function D=floyd(D0) %D0是原关联矩阵，D是表示最短距离的矩阵，D(i,j)等于i到j之间的最短路的距离
[n,n]=size(D0);D=zeros(n); %创建矩阵D，虽不是必要的，但这样程序运行得较快
max1=floor(log(2*n−3)/log(2));
for k=1:max1
for r=1:n;    D1=D0(r,:);    D(r,:)=min(repmat(D1'',1,n)+D0);    end
D0=D; %此前可加上判断两矩阵是否相等的语句来减少循环次数
end
```

注：实际上步骤(2)执行的次数常常不到 max1，只要在步骤(2)得到的矩阵 D 与 D0 相同即可停止计算，因为再执行(2)仍然得到相同的矩阵 D. 这时，可在程序中 D0=D 之前加上判断两矩阵是否相等的语句。但因矩阵中可能有 inf，不能直接进行比较。具体语句如下：

```
DT=D; %因为不能改变D，故要用其副本DT代替D
DT(find(DT==inf))=1;  D0(find(D0==inf))=1; D0=D0−DT;
if sum(D0(:))==0 return; end
```

以上程序的缺点是没有标出最短路的路径。Floyd 的原算法需要计算 n 个循环，但是可以确定最短路的路径，且适用于有负权的最短路问题，但图中不能有总权为负的圈。 算法如下：

(1) 输入权矩阵 $D(0)=(d_{ij}^{(0)})=D$. 在 $d_{ij}^{(0)}$ 边上做上路径标记(i,j),

(2) 计算 $D^{(k)}=(d_{ij}^{(k)})$ $k=1,2,\cdots,n$，其中 $d_{ij}^{(k)}=\min_{s}[d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}]$ 表示在第 k 步时从点 i 到点 j 的某路径距离等于原路径的距离和经过中间点 k 到达 j 点的距离两者的较短者。对每个 $d_{ij}^{(k)}$ 做上路径的标记，当 $d_{ij}^{(k)}=d_{ij}^{(k-1)}$ 时标记不变，不然将 d_{ij}^{k} 的标记为 d_{ik}^{k} 与 d_{kj}^{k} 的标记合并，去掉一个连接处重复的 k 而成。

(3) $D^{(n)}$ 中元素 $d_{ij}^{(n)}$ 就是 i 到 j 的最短路长，对应的标记就是最短路径。

可编一个简单 Matlab 的示意程序为：

```
function [C,D]=floydn(D0)
[n,n]=size(D0); C=cell(n); D1=D0; D1(find(D1==inf))==0;
M=2* max(D1(:));  [II,IJ]=find(D1);
for ii=1:s  C{II(ii),IJ(ii)}=[strcat(int2str(II(ii)),'−',int2str(IJ(ii)))]; end
for k=1:n ;D=min(D0,repmat(D0(:,k),1,n)+repmat(D0(k,:),n,1));
D1=D; D0(find(D0==inf))=M;  D1(find(D1==inf))=M; D0=D0−D1;
[II,IJ]=find(D0>0); s=length(IJ);
```

维普资讯 http://www.cqvip.com


```
for ii=1:s  C{II(ii),IJ(ii)}=strcat(C{II(ii),k},C{k,IJ(ii)}(2:end)); end
D0=D; end
```

4 实例分析

实例1 使用最短路算法求解图1点1至点6的最短路。

分析:为记号简洁起见,省略了步骤数 N.

(1) $P(1)=0$,

(2) $T_1(2) = P(1) + 7 = 7$, $T_1(3) = P(1) + 9 = 9$,

(3) $P(2) = min(T_1(2), T_1(3)) = 7$, $T_2(2) = 1$

(2) $T_1(3) = P(2) + 1 = 8$, $T_1(4) = P(2) + 7 = 14$

(3) $P(3) = \min(T_1(3), T_1(4)) = 8$, $T_2(3)=2$

(2) $T_1(4) = P(3) + 6 = 14$ (也等于旧的 $T_1(4)$), $T_1(5) = T_1(3) + 6 = 14$

(3) $P(4) = min(T_1(4), T_1(5)) = 14$, $P(5) = \min(T_1(4), T_1(5)) = 14$, $T_2(4) = (2, 3)$, $T_2(5) = 3$,

(2) $T_1(6) = \min(P(5)+6, P(4)+7) = 20$,

(3) $P(6) = 20$, $T_2(6) = 5$,

(4) 最短路的逆向为 (6, 5, 3, 2, 1), 因此最短路为 (1, 2, 3, 5, 6). 权和为 $P(6)=20$.

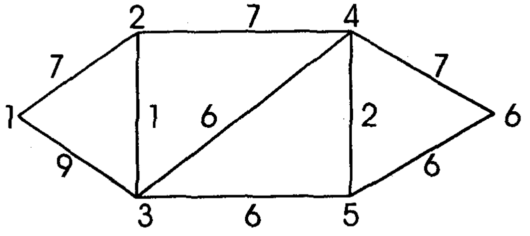

图 1

实际上可以列表1简明扼要地得到结果:

表 1

N=0	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
N=1	(2)	7(1)	9(1)	INF	INF	INF
N=2	(3)	P	8(2)	14(2)	INF	INF
N=3	(4,5)		P	14(2,3)	14(3)	INF
N=4	(6)			P	P	20(5)

表1中括号中的数代表顶点,第二列是逐次得到的具有 P 标记的顶点,因此第二列第一行是起点(1), 第 N 行第 $k+1(>2)$列括号前的值是顶点(k)的 $T_1((k),N)$值,括号中是顶点(k)的 $T_2((k),N)$值,INF 表示无穷大(Infinity),写有 P 的表示该列的顶点已具有 P 标记, 不再参加重新标记(在实际列表时,第一列可以不要, 并且有 P 的单元也可以空着不写, 表1中这样写是为了表达得更清楚)。

实例2 已知某地区的交通网络是一个连通图, 其中交点表示居民小区,边表示公路,边长为权,权矩阵为 D。

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 30 & inf & inf & inf & inf & inf \\ 30 & 0 & 20 & inf & inf & inf & 15 \\ inf & 20 & 0 & 20 & 60 & 25 & inf \\ inf & inf & 20 & 0 & 30 & 18 & inf \\ inf & inf & 60 & 30 & 0 & inf & inf \\ inf & inf & 25 & 18 & inf & 0 & 15 \\ inf & 15 & inf & inf & inf & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

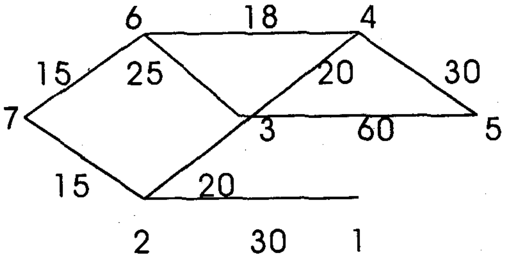

图 2

问区中心医院应建在那个小区,可使离医院最远的小区居民就诊时所走的路程最近?

分析:(1)求出各小区 ii 到小区 jj 之间的最短距离的矩阵 D. 当边是无向时,D 是对称的,小区 ii 到小区 jj 之间的来回最短距离为 $D2=D+D'=2*D$;当边是有向时, 小区 ii 到小区 jj 之间的来回最短距离为对称矩阵 $D2=D+D'$,其中 D' 为 D 的转置。

(2) 行向量 far=max($D2$)的第 jj 个元素表示若医院建在 jj 点,最远的小区到医院的来回距离。

(3) [m, ii]=min(far)就得出医院应建在 ii 点,最远的小区到医院的来回距离为 m.

主程序为:

```
D0=inf*ones(7);
D0(1,[1,2])=[0,30]; D0(2,[1,2,3,6])=[30,0,20,15];
D0(3,[2,3,4,5,6])=[20,0,20,60,25];
```

维普资讯 http://www.cqvip.com


```
D0(4,[3,4,5,6])=[20,0,30,18]; D0(5,[3,4,5])=[60,30,0];
D0(6,[2,3,4,6,7])=[15,25,18,0,15];
D0(7,[6,7])=[15,0];
D=floyd(D0); D2=D+D'; far=max(D2); [m,ii]=min(far)
```

参考文献：

[1] 徐俊明.图论及应用[M].合肥：中国科学技术大学出版社，1998.
[2] 李建中，等.图论导引[M].北京：机械工业出版社，2006.
[3] 玄光明，等.遗传算法与工程优化[M].北京：清华大学出版社，2004.
[4] 马正飞，等.数学计算方法与软件工程的应用[M].北京：化学工业出版社，2002.
[5] 李南南，等.MATLAB7 简明教程[M].北京：清华大学出版社，2006.

MATLAB Program of the Shortest Path Problem of Graph Theory

GUAN Zhi-zhong，LIU Yong-ming
(1.Chizhou College, Chizhou 247000,China;
2. Mathematics Department，East China Normal University, Shanghai 200062，China)

Abstract: This article puts forward the shortest path problem of Graph Theory, and sets forth the optimal algorithm——Dijkstra algorithm and its theory. Furthermore it describes and develops the model's algorithm. Finally the article presents the MATLAB program of the shortest path problem.

Key words: shortest path problem; dijkstra algorithm; MATLAB program; shortest path length

（上接第 20 页）

于是有 $\hat{R}(t)=\dfrac{1}{A}\int_0^\infty \lambda^{c+r-1}(1-\lambda)^{d-1}e^{-\lambda s_1}e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{d-1}\binom{d-1}{k}(-1)^k\Gamma(c+r+k)/(s_1+t)^{c+r+k}}{\sum\limits_{k=0}^{d-1}\binom{d-1}{k}(-1)^k\Gamma(c+r+k)/s_1^{c+r+k}}$

(ii) 当 $0<x<1$ 时，有 $P(R(t)<x\mid t_1,\cdots,t_r)=\dfrac{1}{A}\int_{\frac{\ln x}{t}}^{\infty}\lambda^{c+r-1}(1-\lambda)^{d-1}e^{-\lambda s_1}\,\mathrm{d}\lambda$

两边对 x 求导，可得 $R(t)$ 的后验密度为

$$h_{R(t)}(x\mid t_1,\ldots,t_r)=\frac{x^{(s_1-t)/t}(-\ln x)^{c+r-1}(t+\ln x)^{d-1}}{t^{c+d+r-1}\sum\limits_{k=0}^{d-1}\binom{d-1}{k}(-1)^k\Gamma(c+r+k)/s_1^{c+r+k}},0<x<1$$

在试验 M_2,M_3,M_4 下，$R(t)$ 的 Bayes 估计完全类似地可求得。

参考文献：

[1] 张尧庭,陈汉锋.贝叶斯统计推断[M]. 北京：科学出版社,1991.
[2] 黄江平.定时与定数截尾试验参模的建立与参数估计[J].纯粹数学与应用数学,2004.
[3] 张丕一.定数截尾寿命试验下指数分布平均寿命的置信限的优良性[J].青岛大学学报,1999.
[4] 丁元耀.指数分布寿命试验的 Bayes 可靠性分析[J].宁波大学学报,1998.

Bayes Estimation of Exponent Distribution Reliability under Censoring Testing

FANG Lian-di , GUAN Shi-jun
(School of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241000,China)

Abstract: Under the exponential distribution fixed number or fixed time censoring, this paper discusses Bayes estimation of the R(t),when the prior distribution is different.

Key words: prior distribution; censoring testing; reliability; Bayes estimation.